



SCAN'16 Toulouse

Séminaire de Conception Architecturale Numérique

Mètre et paramètre, mesure et démesure du projet

Sous la direction de Jean-Pierre Goulette et Bernard Ferries

PUN - Editions Universitaires de Lorraine.

ISBN: 978-2-8143-0289-1

Titre de la publication :

Couverture d'une surface d'égale pente par un pavage de Penrose: conception numérique et fabrication

Auteurs :

Ahmed Elshafei, Ahmed Hussein, Mohammad Mansouri, Marios Vekinis, Roberta Zarcone, Mau-rizio Brocato.



Cette publication (présentée dans ce document en version auteur acceptée), est parue dans les actes du Séminaire de Conception Architecturale Numérique SCAN'16 – Toulouse - *Mètre et paramètre, mesure et démesure du projet*, 07-09 septembre 2016, Toulouse

Tout usage du contenu de cette publication doit mentionner la référence de l'ouvrage, du titre et de(s) auteur(s).

Couverture d'une surface d'égale pente par un pavage de Penrose: conception numérique et fabrication

**Ahmed Elshafei, Ahmed Hussein, Mohammad
Mansouri, Marios Vekinis, Roberta Zarcone, Mau-
rizio Brocato.**

Laboratoire GSA, Géométrie-Structure-Architecture, Ecole Natio-
nale Supérieure d'Architecture Paris-Malaquais, Université Paris-
Est, 14 rue Bonaparte 75006 Paris
zarconeroberta@gmail.com

RÉSUMÉ. Cette recherche vise à développer l'utilisation du pavage plan de Penrose, ayant une fonction décorative, sur une surface courbe d'égale pente afin de profiter de ses potentialités structurales. En partant de l'idée que le pavage de Penrose peut avoir des avantages structuraux liés à la possible descente de charges sur plusieurs directions, ce papier présente, sur un cas concret, l'algorithme de génération de la surface courbe pavée, en proposant deux différentes morphologies en réponses aux problématiques d'ordre géométriques et techniques, et la fabrication numérique à échelle un.

MOTS-CLÉS : Surface d'égale pente, Penrose, Modélisation paramétrique, Fabrication numérique

This research studies the use of Penrose tiling on curved surfaces, not only at the decorative level, but also to understand its structural advantages. A Penrose tiling system is applied on a surface of constant slope to focus on the possibility, given by such tiling, to allow charges descend on several directions along the surface. This paper presents a case study of the proposed 3d Penrose tiling system through digital and physical prototyping methods, herein, an algorithm to generate the curved tiling, two morphologies of the surface that examine the geometrical constraints and a digital fabrication prototype.

KEY-WORDS: Constant angle surfaces, Penrose, Parametric modeling, Numeric Fabrication

1. Introduction

Quand en 1974 Roger Penrose, sous l'impulsion des recherches des physiciens sur les quasi-cristaux et sur l'invariance par rotation de $2\pi/5$, théorisa les pavages qui prennent son nom, il ne savait pas que bien six cents ans avant à Boukhara (Ouzbekistan) les artistes musulmans avaient utilisés le même pavage invariant par rotation de $2\pi/5$ pour décorer un mur d'une madrassa (Lu, 2007). L'intérêt pour le pavage de Penrose se réfère surtout à sa symétrie d'ordre 5 (invariance par rotation d'angle $2\pi/5$) (Penrose 2012). La question du pavage du plan a de racines anciens et attire l'intérêt conjoint de mathématiciens, physiciens, chimistes et artistes. Le recouvrement d'une surface, par un ou plusieurs motifs qui se répètent sans laisser d'espaces vides et sans se chevaucher, est aujourd'hui l'un des thèmes les plus traités en morphogénèse, grâce à l'impulsion donnée par les technologies informatiques et à la possibilité de paver une surface courbe quelconque assurant l'interopérabilité de l'analyse morphologique et de l'analyse mécanique.

Si le pavage de Penrose est appliqué sur une surface d'égale pente, nous pouvons remarquer une certaine cohérence entre les directions d'égale pente donnée par la surface et la descente des charges. De fait, à différence des groupes de pavages cristallographiques où les seules rotations possibles sont de 60° et 120° , ou de 90° et 180° , le pavage de Penrose permet de retrouver, à la fois, de directions à 36° , 72° et 108° . Ce qui nous a permis d'adapter plus facilement ces directions aux descentes de charge dans une surface d'égale pente en ayant des avantages structuraux.

Ce papier présente, sur un cas concret, l'algorithme pour la génération numérique d'une surface d'égale pente pavé avec pavage de Penrose par isométrie locale. Nous présentons deux morphologies différentes, en réponse à des problématiques d'ordre géométrique, technique et rhéologique, et la fabrication numérique à échelle un.

1. La géométrie de la surface d'égale pente

Les surfaces d'égale pente ont de nombreuses propriétés géométriques intéressantes, telles que leur pente constante, uniforme tous le long des directrices. Dans notre contexte, puisque nous sommes intéressés à dessiner un motif sur la surface, nous allons mettre l'accent sur sa propriété cruciale qui est la propriété d'être développable. Nous voulons être en mesure de dessiner un motif 2D (en particulier le pavage de Penrose)

dans le plan et l'envoyer sur la surface de la meilleure façon possible. En général, ce processus impliquera toujours une déformation du motif (par exemple la déformation faite par une carte de la terre); sauf dans le cas où la surface est développable, c'est-à-dire qu'elle soit avec courbure Gaussienne nulle. Intuitivement, une surface développable est une surface qui peut être réalisée par pliage d'une feuille de papier; mathématiquement, cette opération est appelée création d'une isométrie locale entre la surface plane et la surface courbe. Cela signifie qu'elles possèdent la même métrique, c'est-à-dire la distance entre deux points dans la surface plane est égale à la distance entre les points correspondants sur la surface courbée, mesurée en suivant la courbe. En d'autres termes, nous envoyons des géodésiques de l'une sur des géodésiques de l'autre..

La surface d'égale pente peut être paramétrée de deux manières: l'une utilisant les vecteurs normaux le long de la directrice (la courbe de base), la seconde est par les vecteurs tangents le long de l'arête de rebroussement (Osserman, 1969). Même si la première paramétrisation est plus intuitive et plus facile à calculer, nous utilisons la deuxième méthode. On sait que, si nous avons une courbe spatiale et une courbe plane avec vitesses unitaires paramétrées par la même longueur d'arc, et des courbures égales aux points correspondants, alors leurs surfaces tangentes développables sont localement isométriques. En d'autres termes la surface générée par le balayage des vecteurs tangents à la courbe plane est la développée de la surface générée par le balayage des vecteurs tangents à la courbe spatiale. Ceci est la raison pour laquelle nous utilisons la paramétrisation de la surface d'égale pente par le balayage des vecteurs tangents le long de l'arête de rebroussement avec vitesses unitaires paramétrée par la longueur d'arc. Nous utilisons maintenant la méthode décrite pour avoir un développé de cette surface sur laquelle nous pouvons un motif 2D. Enfin, en utilisant des fonctions inverses, nous sommes en mesure d'envoyer le motif de la développée plat sur la surface courbée sans déformation. (fig1.)

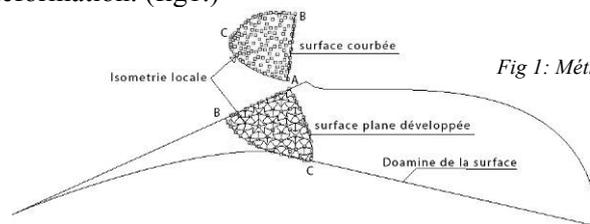


Fig 1: Méthode de développement

1. De la surface aux tuiles: méthode pour obtenir l'épaisseur, contraintes, solutions des assemblages.

Une fois le pavage bidimensionnel appliqué sur la surface d'égale pente, il a été question de créer une structure à partir de ce pavage. Le passage du tracé du pavage sur la forme tridimensionnelle de la surface d'égale pente vers une construction où chaque tuile a un rôle structural a relevé les problématiques suivantes : la matérialité de chaque tuile (matériau, volumétrie, poids, morphologie) et le type d'assemblage des tuiles entre elles. Les deux morphologies proposées A et B sont basées sur une approche de forme comme d'un prototype respectivement en pierre et un béton. Chacun de matériaux nécessite une approche bien différente au niveau de l'assemblage, notamment avec un assemblage par les bords plans triangulés pour le type A et un assemblage par les encoches avec éléments assurant les angles pour le type B. (Fig.2-3)



Fig 2: Type d'assemblage A



Fig 3: Type d'assemblage B

Pour vérifier les solutions proposées, un prototype en carton a été réalisé à échelle un. Une fois testé la faisabilité géométrique du système, un module à échelle un en béton a été réalisé pour vérifier la faisabilité avec ce matériau. Chaque tuile de la structure a été réalisée à l'aide de procédés de fabrication numérique, notamment une machine de découpe laser. Grâce à cette technologie, nous avons opté pour des morphologies où chaque pièce de la structure est légèrement différente en fonction de son emplacement sur la surface d'égale pente courbe afin de suivre avec grande précision la géométrie de la structure envisagée.

Les problématiques principales liées à la transformation du tracé du pavage à un système structural sont : 1. Le problème de la torsion des faces et des bords au niveau local 2. Le problème de *customization* 3. La stabilité globale de la structure 4. Le problème de courbure à assurer au niveau global.

1.1. Morphologie A

La première morphologie explorée est basée sur une approche d'étude de la forme comme d'un prototype en pierre pour réaliser une surface solide mais perforée. Le thème de la matérialité est ainsi traité avec inte-

raction entre la matière solide et celle invisible donné par le jeu de lumière et d'ombres. Le travail étudie la courbure de la surface, la planéité des faces et des bordures et leur triangulation, tout en respectant l'essence du pavage de Penrose. Les côtés du pavage sont décalés 8cm au long des normales de la courbure de la grande surface. Les courbes qui sont parallèles à la direction principale de la courbure de la surface ont quatre côtés plans, tandis que les courbes qui se trouvent dans d'autres directions sont non-planaires (Fig.3). Les côtés en torsion sont ensuite triangulés pour créer des côtés plans et rendre l'assemblage et la fabrication la plus précise. Les faces extérieures des blocs sont définies par les quatre points sur les coins des bords. La proposition de la planéité des surfaces est faite en mesurant la déviation d'un point par rapport au plan commun définis par les autres trois points (Fig. 4). On constate que, la déviation varie de 0,0 à 3,3 cm, la plupart des surfaces ne sont pas planes et la courbure supérieure se trouve à côté de la crête de la grande surface(Fig.5).

La triangulation de la surface est nécessaire pour répondre à la forte courbure de la surface et pour assurer la précision d'assemblage des tuiles. Pour la triangulation des surfaces, l'étude suivie les "règles d'inflation" qui divisent les surfaces de Penrose en petits cerfs-volants et fléchettes qui se rejoignent pour former un fragment parfait avec plus de tuiles et plus de résolution (Fig. 7). Pour explorer les possibilités morphologiques de l'organisation des pavages de Penrose, cette proposition se réfère à la mosaïque islamique quasi-périodique et étudie le maillage entre les tuiles de Girish et de Penrose. L'organisation morphologique des tuiles vise à créer une perforation au sein d'un groupe de décagone tout en gardant le reste de la surface sous forme des tuiles solides (Fig.6).

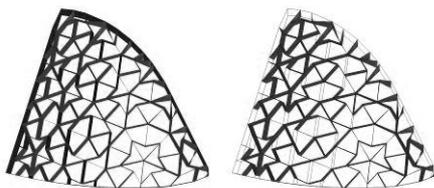


Fig3: Analyse de planéité des bords. Les bords plats en bleu et les côtés tordues en rouge.

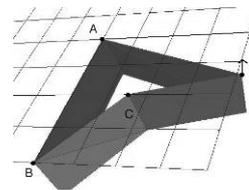


Fig 4: Déviation d'un point D

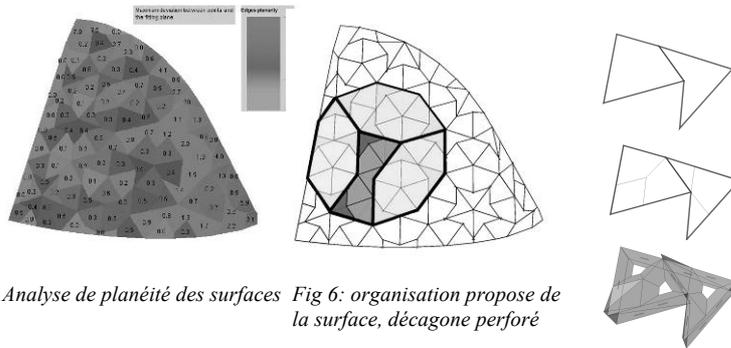


Fig 5: Analyse de planéité des surfaces Fig 6: organisation proposée de la surface, décagone perforé

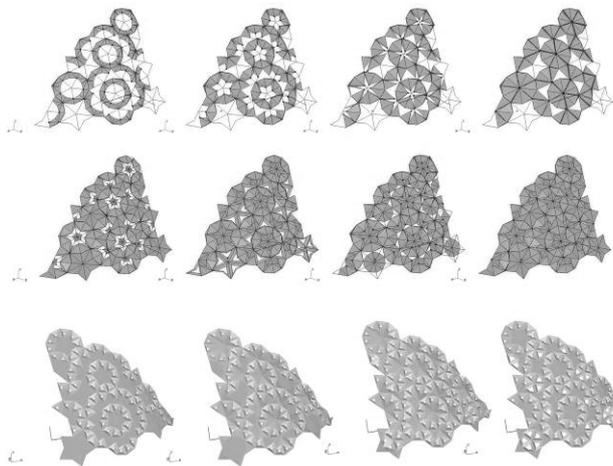


Fig 7: Subdivision des tuiles de Penrose en respectant les « règles d'inflation »

Fig 8 : Etude morphologique de la proposition A

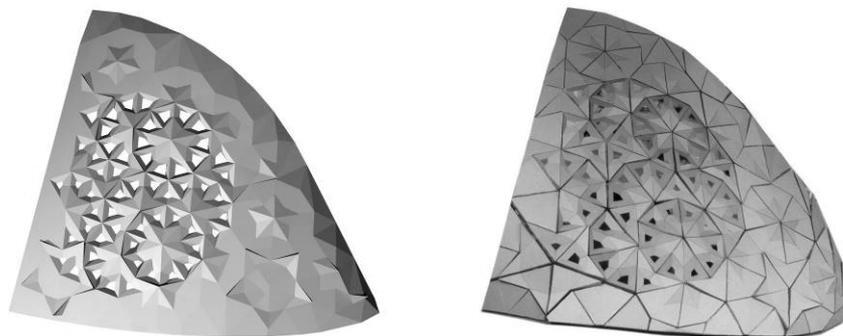


Fig 9: Morphologie A proposé pour la surface (gauche) et réalisation en carton (droite)

1.2. Morphologie B

Pour la deuxième proposition morphologique, réalisé pour un prototype en béton, nous nous sommes focalisés principalement sur deux problématiques: comment assurer l'angle de contact entre les pièces qui varie dans chaque cas et comment assurer la stabilité de la structure globale par la distribution efficace de la matière à travers des perforations.

L'orientation du vecteur normal de chaque sommet des tuiles sur la surface est différente. Donc l'extrusion des tuiles suivant ces normales rend des faces en torsion. Afin d'éviter ce problème de torsion et nous assurer que toutes les faces sont planées, nous avons décidé dans cette proposition de construire des pyramides sur la base de chaque tuile (Fig.10). Ainsi toutes les faces seront triangulaires et planes.

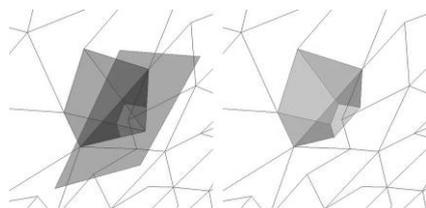


Fig.10: Construction de pyramides sur la base des points

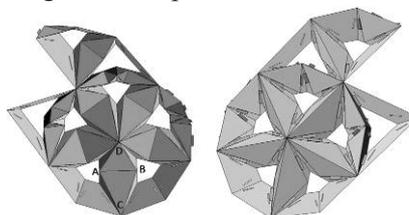


Fig.11: Élément intermédiaire (en vert) composé de deux triangles (ABC et ABD)

Le choix de construire des pyramides sur la base des tuiles de la surface permet ne pas avoir des faces communes entre elles pour pouvoir les assembler. Ainsi il a fallu concevoir des éléments intermédiaires afin d'assurer la jonction des cellules entre elles. Nous avons conçu un élément intermédiaire entre chaque deux cellules qui est composé de deux triangles. Les deux triangles ABC et ABD (Fig.11) qui forment le joint entre deux cellules sont construits par les deux milieux des côtés supérieurs des faces opposées (point A et B) et un des sommets communs des faces (point C et D). Ceci permet de joindre toutes les cellules avec des éléments intermédiaires en assurant l'angle correct de raccordement. Concernant le montage, nous avons procédé par un système d'encoche et de languette sur les cellules et les éléments intermédiaires (Fig. 12). Ceci a permis un assemblage des pièces en carton sans utilisation de colle, et aussi d'avoir une rigidité locale ainsi qu'au niveau global de la structure. Dans le but d'optimiser à la fois la distribution de matière et la stabilité de la surface, les pyramides construites sur la base des tuiles ont été coupées par des plans perpendiculaires aux vecteurs d'extrusion, dont la position de ce plan varie en fonction de la distance de chaque cellule par

rapport à la crête de la surface globale. C'est-à-dire que plus les cellules sont éloignées de la crête plus elles seront profondes (Fig. 13).

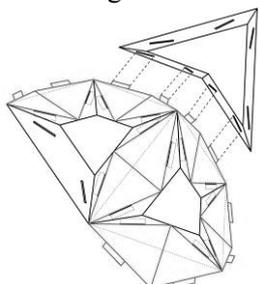


Fig12: Utilisation d'un système de languette et d'encoche

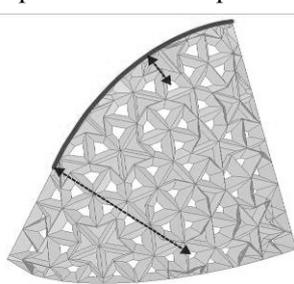


Fig13: La profondeur des éléments dépend de leur distance de la crête

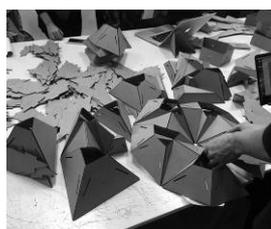


Fig14: Assemblage

Ceci permet d'avoir d'avantage d'appui sur les éléments touchant le sol afin de stabiliser la structure globale, et en même temps rend plus légère les éléments du haut de la structure, ce qui est logique du point de vue structurel.

La morphologie B a été utilisée pour la construction d'une partie de la surface en béton. Cette fois-ci, les pyramides construites sur la base des tuiles de Penrose ont été coupées par des plans perpendiculaires aux vecteurs d'extrusion à distance toujours égale par rapport à la surface, pour se focaliser sur l'étude des assemblages. Ces dernières sont faites à l'aide de tiges filetées de 3 mm, boulons et rondelles. L'angle entre les pièces est assuré avec des pièces spéciales placées entre les tuiles de Penrose.

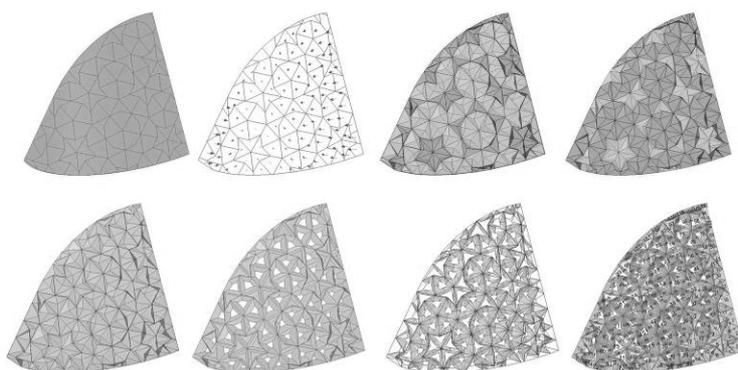


Fig15: Processus de génération de la structure

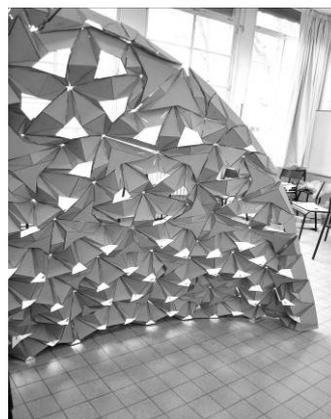


Fig.16: Extradados de la maquette finale

Fig.17: Intrados de la maquette finale

Pour la réalisation des tuiles nous avons utilisé l'Effix design gracieusement fourni par Ciment Calcia. Le coffrage en carton a été développé et coupé au laser (Fig.18-19).



Fig.18: Coulage du béton sur coffrage en carton



Fig19: Modèle numérique et réalisation en béton

4. Conclusion

Ce papier a présenté l'algorithme développé pour paver une surface d'égale pente avec pavage de Penrose par isométrie local. Deux morphologies différentes sont proposées pour la fabrication des trois maquettes structurales à échelle un (2 en carton et 1 béton). La conception du système architecturale proposé est enrichie par l'information, le processus physique et numérique est étroitement relié et les prototypes réalisés ne sont pas les seuls produits de dessin, mais ils sont renseignés par leur relation à leur cadre conceptuel, leur matériau et leurs processus de fabrication. Le modèle nous a permis d'ajouter l'information tout au long de la démarche, et à retrouver une solution pour les différentes contraintes dû

à la courbure de la forme tout en assurant le contrôle maîtrisé de la géométrie.

La démarche mis en place a fait appel à la modélisation mathématique en tant que base pour la connaissance et pour la prise de décision ; nous a permis la création d'un flux d'information continue de l'idée à la fabrication en intégrant la recherche de deux solutions optimales parmi l'ensemble des solutions acceptables, et l'obtention d'une rétroaction sur les idées par les essais sur les maquettes.

La fabrication de deux solutions retenues en carton présente des qualités propres au type d'assemblage et à la morphologie de leurs tuiles. La fabrication des maquettes en carton nous a permis de relever les contraintes propre à la réalisation des prototypes en pierre et béton. La maquette en béton présente des pièces spéciales (en béton) qui permettent d'assurer l'angle entre les tuiles souhaité. Des erreurs de réalisation pendant le coulage ont déterminé une variation de la courbure prévue. Il est envisageable d'imprimer des pièces 3d pour assurer l'angle tout en assurant la rigidité avec des tiges et des boulons.

2. Bibliographie

Alvarez, A. (2010). Fléchettes et cerfs-volants dans le ciel mathématique. *Images des Mathématiques*, CNRS.

Lu, P. J., Steinhardt, Paul J. (2007). Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture, *Science magazine*, Vol. 315 n°5815, 1106-1110

Osserman, R. (1969). *A Survey of Minimal Surfaces*, Von Norstrand Reinhold, New York.

Penrose, R. (2012). *Cycles of Time: An Extraordinary New View of the Universe*. Reprint edition. New York: Vintage.